

# Berechnungen zur isentropen Entspannung eines Argon-Plasmas in einer Laval-Düse

J. ARTMANN

DVL-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart-Vaihingen

(Z. Naturforschg. 20 a, 1027—1030 [1965]; eingegangen am 8. Mai 1965)

Neglecting magnetic and electric forces which occur in the expansion of a plasma in a LAVAL nozzle the plasma parameters are calculated by means of a simplified model<sup>3</sup> under the condition of isentropic flow. An Ein-Stufen-Modell and a Zwei-Stufen-Modell<sup>1</sup> is applied. It proves that the experimental results at hand can only be explained by means of the Zwei-Stufen-Modell. The calculations include the case of thermodynamic equilibrium as well as that of frozen flow.

In dieser Arbeit sollen, unter Benutzung der Kontinuitätsgleichung, der Energiebilanz und der Isentropie, Berechnungen verschiedener gasdynamischer Plasmamaparameter in Argon bis zur 3. Ionisation im engsten Querschnitt, wie für den unmittelbar austretenden Parallelstrahl einer LAVAL-Düse, durchgeführt werden. Ausgehend von den Annahmen, daß magnetische Kräfte während der Entspannung keine Rolle spielen, daß im engsten Querschnitt thermisches Gleichgewicht und Schallgeschwindigkeit herrschen, und daß die Stromaufheizung wie die Wärmeverluste bis zum engsten Querschnitt abgeschlossen sind, können verhältnismäßig einfach einige Meßergebnisse mit Berechnungen nach dem Ein-Stufen-Modell<sup>1,2</sup> und dem Zwei-Stufen-Modell<sup>1</sup> verglichen werden.

Diesen einfachen Modellvorstellungen entsprechend wird ein besonderes Näherungsverfahren<sup>3</sup> zur Bestimmung der Plasmamaparameter benutzt.

## 1. Beschreibende Gleichungen

### a) Bereich des engsten Querschnitts

Alle auf den engsten Querschnitt bezogenen Größen sind im folgenden mit „1“ indiziert. Die im engsten Querschnitt herrschende Schallgeschwindigkeit  $a_1$  ist mit dem der Messung verhältnismäßig leicht zugänglichen Druck  $P_1$  und Durchsatz  $D_1$  gegeben durch:

$$a_1^2 = \gamma_1 P_1 / \varrho_1, \quad (1) \quad D_1 = \varrho_1 a_1 F_1, \quad (2)$$

Das bereits angegebene Näherungsverfahren<sup>3</sup> gestattet es, im thermischen Gleichgewicht den Isentropenexponenten  $\gamma_1$  und die Dichte  $\varrho_1$  für die Ionisationsstufe  $i$  wie folgt zu berechnen:

$$\gamma = \frac{5 + \frac{2 x_i (1 - x_i) (i - 1 + x_i)}{i (i - 1 + 2 x_i)} \left( \frac{5}{2} + \frac{\chi^{(i-1)+}}{k T} \right)^2}{3 + \frac{2 x_i (1 - x_i) (i - 1 + x_i)}{i (i - 1 + 2 x_i)} \left[ \frac{3}{2} + \left( \frac{3}{2} + \frac{\chi^{(i-1)+}}{k T} \right)^2 \right]},$$

$$\varrho = m P / [k T (i + x_i)],$$

wobei  $x_i$  der aus der SAHA-Gleichung folgende entsprechende Ionisationsgrad ist:

$$x_i = -\frac{i-1}{2} + \sqrt{\frac{(i-1)^2}{4} + \frac{f_i}{1+f_i}}$$

mit  $f_i \approx \frac{2}{3} \frac{g_0^{(i)+}}{g_0^{(i-1)+}} \frac{T^{5/2}}{P} \exp - \{ \chi^{(i-1)+} / k T \},$

wenn man  $T$  in °K und  $P$  in  $\text{dyn cm}^{-2}$  einsetzt ( $\chi^{(i)+}$  = Ionisationspotentiale,  $g_0^{(i)+}$  = statistische Gewichte des Grundzustandes,  $m$  = Masse der Atome bzw. Ionen,  $k$  = BOLTZMANN-Konstante).

Aus der Kombination der Gln. (1) und (2) erhält man die den engsten Querschnitt beschreibende Gleichung:

$$T_1 = \frac{m \gamma_1}{k (i_1 + x_{i1})} \left( \frac{P_1 F_1}{D_1} \right)^2. \quad (3)$$

Für vorgegebene Querschnittsfläche, Druck und Durchsatz läßt sich durch Iteration die Temperatur bestimmen.

Geht man von der Vorstellung aus, daß zwar der Druck, nicht aber die Temperatur über den Quer-

<sup>1</sup> B. AHLBORN, Z. Naturforschg. 20 a, 466 [1965].

<sup>2</sup> F. MOSER, Inst. f. Hochtemperaturforschung, Techn. Hochschule Stuttgart, Vortrag F. A. Plasma- und Gasentladungsphysik, April 1965.

<sup>3</sup> J. ARTMANN, Z. Phys. 183, 65 [1965].



schnitt konstant ist, und nimmt das bereits von AHLBORN<sup>2</sup> beschriebene Zwei-Stufen-Modell an, so ist zur Bestimmung der Temperatur der heißen Zone in Gl. (3) für  $F_1$  lediglich der heiße innere Querschnitt und für  $D_1$  der Durchsatz durch diese Fläche einzusetzen. Wenn in der verhältnismäßig kalten äußeren Ringströmung ebenfalls Schallgeschwindigkeit, aber keine oder nur sehr schwache Ionisation herrscht, ergibt sich für diesen Durchsatz:

$$D_1 = D - P_1 \sqrt{\gamma_{01} \frac{m}{k T_{01}}} (F - F_1) \quad \text{mit} \quad \gamma_{01} = 5/3,$$

wobei  $D$  jetzt der Gesamtdurchsatz und  $F$  die Fläche des engsten Querschnittes ist. (Die Indizierung mit „01“ bezieht sich auf die kältere Ringströmung.)

### b) Erhaltungssätze

Alle Parameter des austretenden Plasmastrahls sind mit „2“ indiziert. Kontinuitäts- und Energiesatz lassen sich im stationären Fall sofort aufschreiben. Der Kontinuitätssatz lautet:

$$\varrho_1 a_1 F_1 = \varrho_2 w_2 F_2. \quad (4)$$

Vernachlässigt man hinter dem engsten Querschnitt die Aufheizung, die Wärmeverluste und die äußeren Kräfte, so nimmt der Energiesatz folgende einfache Form an:

$$a_1^2/2 + h_1 = w_2^2/2 + h_2, \quad (5)$$

wobei die spezifische Enthalpie  $h$  mit der Näherung<sup>3</sup> wie folgt gegeben ist:

$$h = \frac{1}{m} \left\{ \frac{5}{2} k T (i + x_i) + \sum_{j=2}^i \chi^{(i-2)+} + x_i \chi^{(i-1)+} \right\}.$$

Als dritte Gleichung kann an Stelle des Impulssatzes die Entropiebilanz benutzt werden. Betrachtet man neben den vorher benutzten Voraussetzungen eine reibungsfreie Strömung, so gilt:

$$T \frac{ds}{dt} = - \sum \mu_i \frac{dx_i}{dt}.$$

Für thermodynamisches und für eingefrorenes Gleichgewicht während der stationären Entspannung bleibt die Entropie konstant, da im ersten Fall immer  $\sum \mu_i (dx_i/dt) = 0$  und im zweiten Fall  $dx_i/dt = 0$  ist. Es gilt also:

$$s_1 = s_2, \quad (6)$$

wobei die Entropie  $s$  genähert gegeben ist zu

$$s = \frac{k}{m} \left\{ (1 - x_i) \ln \left[ \frac{(2 \pi m)^{3/2} (e k T)^{5/2} g_0^{(i-1)+} (i + x_i)}{h^3 (1 - x_i) P} \right] + x_i \ln \left[ \frac{(2 \pi m)^{3/2} (e k T)^{5/2} g_0^{(i)+} (i + x_i)}{h^3 x_i P} \right] + (i - 1 + x_i) \ln \left[ \frac{(2 \pi m_e)^{3/2} (e k T)^{5/2} 2 (i + x_i)}{h^3 (i - 1 + x_i) P} \right] \right\}$$

( $m_e$  = Masse des Elektrons und  $e$  = Basis des natürlichen Logarithmus). Im eingefrorenen Gleichgewicht gilt:  $x_{i1} = x_{i2}$ . Da für das Zwei-Stufen-Modell die Wechselwirkung zwischen heißer Achsenströmung und äußerer kalter Ringströmung als vernachlässigbar klein angenommen wird, können hier die drei Erhaltungssätze auf den heißen Kern beschränkt werden.

Sind die Verhältnisse im engsten Querschnitt bestimmt, kann aus Gl. (6) die Temperatur  $T_2$  des heißen austretenden Plasmastrahls berechnet werden. Der Querschnitt des Strahls folgt aus den Gln. (4) und (5) zu

$$F_2 = \frac{F_1 a_1}{\sqrt{2(a_1^2/2 + h_1 - h_2)}} \frac{\varrho_1}{\varrho_2}.$$

Die Geschwindigkeit des Parallelstrahles ergibt sich bei bekannten  $F_{1,2}$ ;  $\varrho_{1,2}$  und  $a_1$  sofort aus der Kontinuitätsgleichung. Die MACH-Zahl errechnet sich über die Schallgeschwindigkeit zu

$$M = w_2/a_2 \quad \text{mit} \quad a_2^2 = \gamma_2 P_2/\varrho_2,$$

wobei  $\gamma_2 = 5/3$  im eingefrorenen Gleichgewicht eingesetzt werden muß.

## 2. Diskussion der Ergebnisse

Den Berechnungen der Kurvenwerte in den Abb. 1, 2, 3 lag eine von HÜGEL<sup>4</sup> nach dem FOELSCHSchen Verfahren ausgelegte LAVAL-Parallelstrahldüse zugrunde, an der eine Grenzschichtkorrektur vorgenommen wurde. Diese Düse diente als Anode eines Plasmabrenners. Der Durchmesser des engsten Querschnitts der Düse betrug 0,3 cm. Bei einem äußeren Kammerdruck von etwa 2,5 Torr wurde ein Durchsatz von 0,96 g/sec gemessen. Es stellte sich im stationären Betrieb ein leuchtender Parallelstrahldurchmesser von etwa 1,15 cm ein. Der Austrittsdurchmesser der Düse war 1,8 cm. Da keine direkte Messung des Druckes im engsten Querschnitt vorgenommen werden konnte, mußte für das Auswertbeispiel der Druck vorgegeben werden. Nach den bisherigen Erfahrungen von KRÜLLE<sup>5</sup> wurde  $P_1 = 1$  Atm ge-

<sup>4</sup> H. HÜGEL, DVL-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart, persönliche Mitteilung.

<sup>5</sup> G. KRÜLLE, DVL-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart, persönliche Mitteilung.

wählt. Bei Argon als Arbeitsgas hatte sich bisher gezeigt, daß der Stromübergang hauptsächlich im konvergenten Teil der LAVAL-Düse erfolgte, so daß die Annahme, daß im divergenten Teil der Düse die Aufheizung und damit die elektrischen und magnetischen Kräfte vernachlässigbar sind, gerechtfertigt erscheint.

Berechnet man mit diesen Daten die Plasmaparameter nach dem Einstufen-Modell<sup>1, 2</sup>, so ergibt sich eine Temperatur  $T_2$ , die im Gleichgewichtsfall und bei der Annahme, daß die Ionentemperatur gleich der Elektronentemperatur ist, auch im eingefrorenen Gleichgewicht durchschnittlich um eine Zehnerpotenz unter der von BETH, BOHN und NEDDER<sup>6</sup> gemessenen Elektronentemperatur liegt (siehe Tab. 1). Bei dieser spektroskopischen Messung ergab sich eine Elektronentemperatur von ungefähr 9500 °K (etwa kon-

	$T$ °K	$d$ cm	$w$ cm/s	$M$	$x_i$	Einstufen- Modell
1	$4,7 \cdot 10^3$	0,3	$1,3 \cdot 10^5$	1	$2 \cdot 10^{-5}$	thermisches Gleichgewicht eingefrorene Entspannung
2	$0,48 \cdot 10^3$	1,2	$2,4 \cdot 10^5$	6	$10^{-15}$	
2	$0,47 \cdot 10^3$	1,2	$2,4 \cdot 10^5$	6	$2 \cdot 10^{-5}$	

Tab. 1.  $P_1=1$  Atm,  $P_2=2,5$  Torr,  $D=0,96$  g/s.  
1: engster Querschnitt, 2: Austrittsquerschnitt.

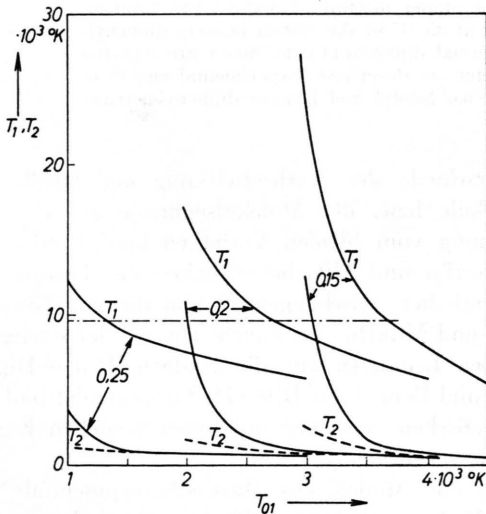


Abb. 1\*. Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  in °K der heißen Strömung als Funktion der Temperatur  $T_{01}$  in °K der kälteren Ringströmung für verschiedene Durchmesser der achsen-nahen Strömung  $d_1=0,25; 0,2$  und  $0,15$  cm bei den Drücken  $P_1=1$  Atm,  $P_2=2,5$  Torr, dem Durchsatz  $D=0,96$  g/s und dem engsten Querschnittsdurchmesser  $d=0,3$  cm. Index „1“ = engster Querschnitt, „2“ = Austrittsquerschnitt. — = Gleichgewicht, — — — = eingefrorenes Gleichgewicht, ····· Meßwert<sup>6</sup> für  $T_2$ .

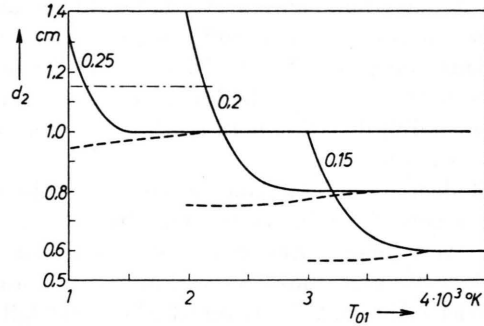


Abb. 2. Durchmesser  $d_2$  in cm der heißen Strömung als Funktion der Temperatur  $T_{01}$  in °K der kälteren Ringströmung für verschiedene Durchmesser der achsen-nahen Strömung  $d_1=0,25; 0,2$  und  $0,15$  cm bei den Drücken  $P_1=1$  Atm,  $P_2=2,5$  Torr, dem Durchsatz  $D=0,96$  g/s und dem engsten Querschnittsdurchmesser  $d=0,3$  cm. Index „1“ = engster Querschnitt, „2“ = Austrittsquerschnitt. — = Gleichgewicht, — — — = eingefrorenes Gleichgewicht, ····· Meßwert<sup>4</sup>.

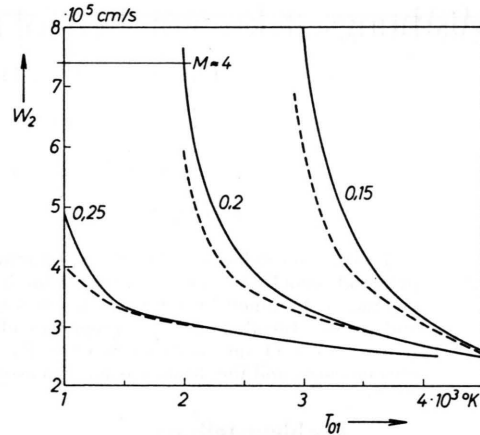


Abb. 3. Strömungsgeschwindigkeit  $w_2$  in cm/s der heißen Strömung als Funktion der Temperatur  $T_{01}$  in °K der kälteren Ringströmung für verschiedene Durchmesser der achsen-nahen Strömung  $d_1=0,25; 0,2$  und  $0,15$  cm bei den Drücken  $P_1=1$  Atm,  $P_2=2,5$  Torr, dem Durchsatz  $D=0,96$  g/s und dem engsten Querschnittsdurchmesser  $d=0,3$  cm. Index „1“ = engster Querschnitt, „2“ = Austrittsquerschnitt. — = Gleichgewicht, — — — = eingefrorenes Gleichgewicht.

stant über den Querschnitt der leuchtenden Strömung hinweg). Um diese Temperaturen mit dem Einstufen-Modell zu realisieren, müßte der Druck im

<sup>6</sup> M.-U. BETH, W. L. BOHN u. G. NEDDER, DVL-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart, persönliche Mitteilung.

\* Zur Aufzeichnung der Kurven in den Abb. 1, 2 und 3 wurden nur die Bereiche ausgewählt, bei denen mit dem Näherungsverfahren die genauesten Ergebnisse zu erwarten waren. Der Vergleich mit den experimentellen Werten ist nur größenordnungsmäßig möglich, da der Druck des engsten Querschnitts nicht gemessen wurde.

engsten Querschnitt um ein Vielfaches höher angenommen werden, was aber mit einer einfachen Energiebilanz unverträglich ist. Dieses Modell könnte die Verhältnisse nur beschreiben, wenn auch im divergenten Teil der Düse noch erhebliche Aufheizung stattfinden würde.

Mit dem erfolgreich von AHLBORN<sup>1</sup> für Berechnungen von Plasmabrennern ohne divergenten Düsenteil verwendeten Zwei-Stufen-Modell lassen sich auch hier die Verhältnisse wesentlich besser beschreiben (siehe Abb. 1, 2, 3 \*). Im Gleichgewichtsfall für  $d_1 = 0,2$  cm und  $T_{01} = 2000$  °K stimmen die theoretischen Werte mit den Meßwerten recht gut überein. Für das eingefrorene Gleichgewicht liegen die Temperaturen im Endquerschnitt wesentlich niedri-

ger als im Falle des thermischen Gleichgewichts. Die allgemeine Frage des Gleichgewichts, besonders Elektronen- und Ionentemperatur betreffend, soll in einer nachfolgenden Arbeit behandelt werden.

Daß sich die beiden Stromröhren während der Entspannung mischen, widerspricht der bisherigen Erfahrung, da der leuchtende Plasmastrahl den Düsenendquerschnitt nur zu etwa 65% ausfüllt. Es sei denn, es handelte sich hier um beträchtliche Grenzschichtphänomene<sup>2</sup>.

Herrn A. GÜLICH, DVL-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart, und Herrn Dr. WERTZ, Rechenabteilung der DVL, Stuttgart, danke ich für die wertvolle Hilfe in Fragen der Programmierung.

## Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Mischungseffekte von Benzol mit seinen Quasi-Dimeren Diphenyl, o,o'-Ditolyl und Diphenylmethan

G. KORTÜM und H. SCHREIBER

Institut für Physikalische Chemie der Universität Tübingen

(Z. Naturforschg. 20 a, 1030—1045 [1965]; eingegangen am 10. Mai 1965)

Explicit formulae for the excess functions of monomer-dimer mixtures based on the "average potential model" are given. Values of the heat of mixing at 35 °C of the system benzene-diphenylmethane determined by means of a sensitive quasi-isothermal differential calorimeter are reported and constructional details and properties of the calorimeter are described. Experimental and theoretical values of the mixtures benzene-diphenyl, benzene-o,o'-bitolyl and benzene-diphenylmethane are compared and the deviations are discussed.

### Problemstellung

Bei flüssigen Gemischen aus nichtpolaren hochpolymeren Molekülen mit entsprechenden monomeren Molekülen läßt sich der größte Teil der freien Zusatzenthalpie und Zusatzentropie durch einen kombinatorischen (geometrischen) Effekt zusammen mit dem von PRIGOGINE<sup>1</sup> eingeführten strukturellen Effekt (Einfluß der Flexibilität der polymeren Moleküle) deuten. Bei Mischungen aus monomeren Molekülen und polymeren niedrigen Polymerisationsgrads ist jedoch der Einfluß selbst geringer

Unterschiede der Wechselwirkung und Größe der Moleküle bzw. der Molekülsegmente auf die Abweichung vom idealen Verhalten beträchtlich.

KORTÜM und Mitarbeiter haben die Theorie der athermischen Mischungen<sup>2,3</sup> und die von GUGGENHEIM und Mitarb.<sup>4</sup> erweiterte Theorie der streng regulären Lösungen auf die Systeme Benzol-Diphenyl<sup>5</sup> und Benzol-o,o'-Ditolyl<sup>6,7</sup> angewendet und die theoretischen Aussagen mit experimentellen Ergebnissen verglichen.

Da das Modell des Durchschnittspotentials<sup>8-10</sup> die Mischungseffekte bei flüssigen Gemischen mono-

<sup>1</sup> I. PRIGOGINE, The Molecular Theorie of Solutions, North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1957, S. 323 ff.

<sup>2</sup> P. J. FLORY, J. Chem. Phys. 10, 51 [1942].

<sup>3</sup> R. H. FOWLER u. E. A. GUGGENHEIM, Statistical Thermodynamics, Cambridge University Press, London 1949.

<sup>4</sup> E. A. GUGGENHEIM, Mixtures, Oxford University Press, London 1952.

<sup>5</sup> G. KORTÜM, G. DRESEN u. H.-J. FREIER, Z. Naturforschg. 8 a, 546 [1953].

<sup>6</sup> G. KORTÜM u. W. VOGEL, Z. Elektrochem. 62, 40 [1958].

<sup>7</sup> W. VOGEL, Dissertation, Tübingen 1957.

<sup>8</sup> I. PRIGOGINE, A. BELLEMANS u. A. ENGLERT-CHOWLES, J. Chem. Phys. 24, 518 [1956].

<sup>9</sup> S. A. RICE, J. Chem. Phys. 24, 357, 1283 [1956].

<sup>10</sup> R. L. SCOTT, J. Chem. Phys. 25, 193 [1956].